



TITLE:

# バナッハ空間における Rogosinski型近似法について (非線 形解析学と凸解析学の研究)

AUTHOR(S):

西白保, 敏彦

---

CITATION:

西白保, 敏彦. バナッハ空間におけるRogosinski型近似法について (非線形解析学と凸解析学の研究). 数理解析研究所講究録 2002, 1246: 110-122

ISSUE DATE:

2002-01

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/41719>

RIGHT:

# バナッハ空間における Rogosinski 型近似法について

琉球大・理 西白保敏彦 (Toshihiko Nishishiraho)

## 1. 序

$C_{2\pi}$  は実軸  $\mathbb{R}$  上で定義された周期  $2\pi$  を持つ連続関数全体のなすバナッハ空間を表す. 各  $f \in C_{2\pi}$  のノルムは

$$\|f\|_{\infty} = \max\{|f(t)| : |t| \leq \pi\}$$

である.  $\mathbb{N}$  を正の整数全体の集合とし,  $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$  とおく. また,  $\mathbb{Z}$  はすべての整数全体の集合を表す. 各  $n \in \mathbb{N}_0$  に対して,  $n$  次の Rogosinski 作用素は

$$B_n(f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} b_n(t) f(x-t) dt \quad (\forall f \in C_{2\pi}, x \in \mathbb{R})$$

によって定義される. 但し,

$$b_n(t) = \frac{1}{2} \left\{ D_n\left(t + \frac{\pi}{2n+1}\right) + D_n\left(t - \frac{\pi}{2n+1}\right) \right\}$$

であり,

$$D_n(u) = \sum_{j=-n}^n e^{iju} \quad (\forall u \in \mathbb{R})$$

は  $n$  次の Dirichlet 核である (cf. [3, 13, 14]).  $f$  の Fourier 級数を

$$f(t) \sim \sum_{j=-\infty}^{\infty} \hat{f}(j) e^{ijt} \quad (\forall t \in \mathbb{R})$$

とし, その第  $n$  部分和を

$$S_n(f)(t) = \sum_{j=-n}^n \hat{f}(j) e^{ijt}$$

とすれば,

$$B_n(f)(x) = \frac{1}{2} \left\{ S_n(f)\left(x + \frac{\pi}{2n+1}\right) + S_n(f)\left(x - \frac{\pi}{2n+1}\right) \right\}$$

と表される. さて, 次の収束定理が成り立つ ([1, Proposition 1.3.4] 参照):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|B_n(f) - f\|_{\infty} = 0 \quad (\forall f \in C_{2\pi}). \quad (1)$$

各  $n \in \mathbb{N}_0$  に対して,  $\mathfrak{T}_n$  は  $n$  次以下の三角多項式全体の集合を表し,  $f \in C_{2\pi}$  と  $\mathfrak{T}_n$  の間の距離を

$$E_n(C_{2\pi}; f) = \inf\{\|f - g\|_\infty : g \in \mathfrak{T}_n\}$$

と書き, これを  $\mathfrak{T}_n$  に関する  $f$  の  $n$  次最良近似度と言う.  $\mathfrak{T}_n$  は Haar の条件を満たす  $2n+1$  次元の線形部分空間であるから, 任意の  $f \in C_{2\pi}$  は唯一の最良近似  $g_n$  を持つ. すなわち,

$$E_n(C_{2\pi}; f) = \|f - g_n\|_\infty$$

となる  $g_n \in \mathfrak{T}_n$  が一意に存在する (例えば, [11, 定理 6.1.8] 参照). 古典的な Weierstrass の三角多項式近似定理は

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_n(C_{2\pi}; f) = 0 \quad (\forall f \in C_{2\pi})$$

と同値である.

各  $f \in C_{2\pi}$ ,  $\delta \geq 0$  に対して,

$$\omega(C_{2\pi}; f, \delta) = \sup\{\|f(\cdot - t) - f(\cdot)\|_\infty : |t| \leq \delta\},$$

$$\omega^*(C_{2\pi}; f, \delta) = \sup\{\|f(\cdot + t) + f(\cdot - t) - 2f(\cdot)\|_\infty : 0 \leq t \leq \delta\}$$

はそれぞれ  $f$  の連続率,  $f$  の一般連続率と呼ばれる ([1, Definitions 1.5.1 and 1.5.3], cf. [19]). 常に,

$$\omega^*(C_{2\pi}; f, \delta) \leq 2\omega(C_{2\pi}; f, \delta) \quad (\forall f \in C_{2\pi}, \delta \geq 0)$$

及び

$$\lim_{\delta \rightarrow +0} \omega(C_{2\pi}; f, \delta) = 0, \quad \text{従って,} \quad \lim_{\delta \rightarrow +0} \omega^*(C_{2\pi}; f, \delta) = 0 \quad (\forall f \in C_{2\pi})$$

が成立する. 更に, (1) は次のような評価式で精密化される:

$$\|B_n(f) - f\|_\infty \leq (2\pi + 1)E_n(C_{2\pi}; f) + \frac{1}{2}\omega^*\left(C_{2\pi}; f, \frac{\pi}{2n+1}\right) \quad (\forall f \in C_{2\pi}, n \in \mathbb{N}_0)$$

([1, Theorem 2.4.8]), 従って,

$$\|B_n(f) - f\|_\infty \leq (2\pi + 1)E_n(C_{2\pi}; f) + \omega\left(C_{2\pi}; f, \frac{\pi}{2n+1}\right) \quad (\forall f \in C_{2\pi}, n \in \mathbb{N}_0)$$

([6, Chap. 10, Sec. 4, Theorem]).

同様な事が  $1 \leq p < \infty$  とし,  $\mathbb{R}$  上で周期  $2\pi$  を持ち, 且つ  $[-\pi, \pi]$  上で  $p$  乗絶対ルベグ可積分関数  $f$  の全体で

$$\|f\|_p = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^p dt\right)^{1/p}$$

をノルムとするバナッハ空間  $L_{2\pi}^p$  においても成り立つ.

本講演では, 一般のバナッハ空間において Fourier 展開の視点から Rogosinski 型の作用素を導入し, それによる近似問題を考える. 更に,  $C_{2\pi}$  や  $L_{2\pi}^p$  ( $1 \leq p < \infty$ ) を含む一般の斉次バナッハ空間の場合への応用を試みる. 従って, 上で述べた結果が一般化される. 詳細な取り扱いについては, [12] を参照.

## 2. マルチプライヤー作用素

$X$  をバナッハ空間とし,  $B[X]$  は  $X$  からそれ自身への有界線形作用素全体のなす通常の作用素ノルム  $\|\cdot\|_{B[X]}$  を持つバナッハ環を表す.  $\mathfrak{P} = \{P_j : j \in \mathbb{Z}\}$  は  $B[X]$  に属する射影作用素の列で次の条件を満たすとする:

(P-1)  $P_j P_k = \delta_{j,k} P_j$  ( $\forall j, k \in \mathbb{Z}$ ). ここで,  $\delta_{j,k}$  は Kronecker のデルタ関数を表す.

(P-2)  $\cup_{j \in \mathbb{Z}} P_j(X)$  で生成される線形部分空間は  $X$  で稠密である.

(P-3) すべての  $j \in \mathbb{Z}$  に対して,  $P_j(f) = 0$  ならば  $f = 0$  である.

任意の  $f \in X$  に対して, その  $\mathfrak{P}$  に関する (形式的な) Fourier 級数

$$f \sim \sum_{j=-\infty}^{\infty} P_j(f). \quad (2)$$

を考える.  $T \in B[X]$  が  $X$  上のマルチプライヤー作用素であるとは, スカラー列  $\{\tau_j : j \in \mathbb{Z}\}$  が存在してすべての  $f \in X$  に対して,

$$T(f) \sim \sum_{j=-\infty}^{\infty} \tau_j P_j(f)$$

が成り立つことである. そして, 次の表記法を用いる:

$$T \sim \sum_{j=-\infty}^{\infty} \tau_j P_j$$

(cf. [2, 7, 8, 17]).  $M[X]$  は  $X$  上のすべてのマルチプライヤー作用素全体の集合を表す. これは  $B[X]$  の恒等作用素  $I$  を含む可換な閉部分環である.  $\mathfrak{T} = \{T_t : t \in \mathbb{R}\}$  は  $M[X]$  に属する作用素の族で

$$A = \sup\{\|T_t\|_{B[X]} : t \in \mathbb{R}\} < \infty,$$

$$T_t \sim \sum_{j=-\infty}^{\infty} e^{-ijt} P_j \quad (\forall t \in \mathbb{R}). \quad (3)$$

とする. このとき,  $\mathfrak{A}$  は線形作用素の強連続群に成り, その生成作用素  $G$  の定義域を  $D(G)$  とすれば

$$G(f) \sim \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-ij) P_j(f) \quad (\forall f \in D(G))$$

が成立する ([7, Proposition 2]).

各  $r \in \mathbb{N}_0, t \in \mathbb{R}$  に対して,

$$\Delta_t^0 = I, \quad \Delta_t^r = (T_t - I)^r = \sum_{k=0}^r (-1)^{r-k} \binom{r}{k} T_{kt} \quad (r \geq 1)$$

と置く. このとき,  $\Delta_t^r$  は  $M[X]$  に属し,

$$\|\Delta_t^r\|_{B[X]} \leq A_r \quad (\forall t \in \mathbb{R}, r \in \mathbb{N}_0),$$

但し,

$$A_r = \min\{(A+1)^r, 2^r A\},$$

そして

$$\Delta_t^r \sim \sum_{j=-\infty}^{\infty} (e^{-ijt} - 1)^r P_j \quad (\forall t \in \mathbb{R}, r \in \mathbb{N}_0)$$

が成り立つ. 各  $r \in \mathbb{N}_0, f \in X, \delta \geq 0$  に対して,

$$\omega_r(X; f, \delta) = \sup\{\|\Delta_t^r(f)\|_X : |t| \leq \delta\}$$

と定義し, これを  $\mathfrak{A}$  に関する  $f$  の  $r$  次連続率という. これが持つ基本的な性質の 1 つは

$$\omega_{r+s}(X; f, \delta) \leq A_r \omega_s(X; f, \delta) \quad (\forall r \in \mathbb{N}, s \in \mathbb{N}_0, \delta \geq 0, f \in X),$$

特に

$$\lim_{\delta \rightarrow +0} \omega_r(X; f, \delta) = 0 \quad (\forall f \in X, r \in \mathbb{N}_0)$$

である ([9, Lemma 1 (c)]).

$r \in \mathbb{N}, \alpha > 0$  とする.  $X$  の要素  $f$  がオーダー  $\alpha$  と定数  $K > 0$  を持つ  $r$  次 Lipschitz 条件を満たす, またはクラス  $Lip_r(X; \alpha, K)$  に属するとは,

$$\omega_r(X; f, \delta) \leq K \delta^\alpha \quad (\forall \delta \geq 0)$$

が成り立つことである. また,

$$Lip_r(X; \alpha) = \bigcup_{K>0} Lip_r(X; \alpha, K)$$

はオーダー $\alpha$ の $r$ 次 Lipschitz クラスと呼ばれる.

各  $f \in X, \delta \geq 0$  に対して,

$$\omega(X; f, \delta) = \omega_1(X; f, \delta) = \sup\{\|T_t(f) - f\|_X : |t| \leq \delta\}$$

$$\omega^*(X; f, \delta) = \sup\{\|T_t(f) + T_{-t}(f) - 2f\|_X : 0 \leq t \leq \delta\}$$

と定義する (cf. [7, Definitions 3 and 4]). このとき,

$$\frac{1}{A}\omega_2(X; f, \delta) \leq \omega^*(X; f, \delta) \leq A\omega_2(X; f, \delta) \quad (\forall f \in X, \delta \geq 0) \quad (4)$$

が成立する. 従って, 特に,  $A \leq 1$  (よって,  $A = 1$ ) ならば

$$\omega_2(X; f, \delta) = \omega^*(X; f, \delta) \quad (\forall f \in X, \delta \geq 0)$$

である.

$\alpha > 0$  とする.  $Lip^*(X; \alpha)$  はある定数  $K > 0$  に対して

$$\omega^*(X; f, \delta) \leq K\delta^\alpha \quad (\forall \delta \geq 0)$$

を満たす  $f \in X$  の全体から成るクラスを表す. (4) によって,

$$Lip_2(X; \alpha) = Lip^*(X; \alpha) \quad (\forall \alpha > 0).$$

任意の  $n \in \mathbb{N}_0$  に対して,  $M_n$  は  $\{P_j(X) : |j| \leq n\}$  で生成される線形部分空間を表す. これは  $X$  の閉線形部分空間である. 各  $f \in X$  に対して,

$$E_n(X; f) = \inf\{\|f - g\|_X : g \in M_n\}$$

と定義し, これを  $M_n$  に関する  $f$  の  $n$  次最良近似度という. ノルム空間における最良近似理論の解説については, [11] を参照. 明らかに,

$$E_0(X; f) \geq E_1(X; f) \geq \cdots \geq E_n(X; f) \geq \cdots \geq 0 \quad (\forall f \in X)$$

で, 条件 (P-2) によって

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_n(X; f) = 0 \quad (\forall f \in X)$$

### 3. Rogosinski 型作用素

$\chi \in L^1_{2\pi}, W \in M[X]$  で

$$W \sim \sum_{j=-\infty}^{\infty} \lambda_j P_j$$

とする. このとき, 任意の  $f \in X$  に対して

$$(\chi * W)(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \chi(t) T_t(W(f)) dt$$

は常に Bochner 積分として存在する. これによって定義される作用素  $\chi * W$  を  $\chi$  と  $W$  からつくられる合成積作用素という (cf. [7, 9]).  $\chi * W$  は  $B[X]$  に属し,

$$\|\chi * W\|_{B[X]} \leq A \|\chi\|_1 \|W\|_{B[X]} \quad (5)$$

である. 更に,  $\chi * W$  は  $M[X]$  に属し,

$$\chi * W \sim \sum_{j=-\infty}^{\infty} \hat{\chi}(j) \lambda_j P_j \quad (6)$$

が成り立つ ([10, Lemma 1], cf. [9, Lemma 2]).

**補題 1** すべての  $t \in \mathbb{R}$  に対して,

$$\chi(\cdot - t) * W = T_t(\chi * W) \quad (7)$$

が成立する.

**証明** (6) によって,

$$\chi(\cdot - t) * W \sim \sum_{j=-\infty}^{\infty} e^{-ijt} \hat{\chi}(j) \lambda_j P_j \quad (\forall t \in \mathbb{R}). \quad (8)$$

$\forall j \in \mathbb{Z}, f \in X$  とする. このとき, (8), (6) 及び (3) によって,

$$\begin{aligned} P_j((\chi(\cdot - t) * W)(f)) &= e^{-ijt} \hat{\chi}(j) \lambda_j P_j(f) \\ &= e^{-ijt} P_j((\chi * W)(f)) = P_j(T_t((\chi * W)(f))). \end{aligned}$$

従って, 条件 (P-3) によって, (7) が成り立つ.

さて, 各  $n \in \mathbb{N}_0$  に対して,  $n$  次 Rogosinski 型作用素  $R_n$  を

$$R_n(f) = (b_n * I)(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} b_n(t) T_t(f) dt \quad (\forall f \in X)$$

によって定義する. 各  $n \in \mathbb{N}_0$  に対して,  $S_n$  を Fourier 級数 (2) による第  $n$  部分和作用素とする:

$$S_n = \sum_{j=-n}^n P_j \quad (\forall n \in \mathbb{N}_0).$$

**補題 2** すべての  $n \in \mathbb{N}_0$  に対して,

$$R_n = \frac{1}{2} \left( T_{\pi/(2n+1)} + T_{-\pi/(2n+1)} \right) S_n = \sum_{k=-n}^n \cos\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) P_k \quad (9)$$

が成立する.

**証明** (6) に鑑み,

$$S_n = D_n * I \quad (\forall n \in \mathbb{N}_0).$$

従って, 補題 1 によって

$$\begin{aligned} R_n &= \frac{1}{2} \left\{ D_n \left( \cdot + \frac{\pi}{2n+1} \right) * I + D_n \left( \cdot - \frac{\pi}{2n+1} \right) * I \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ T_{-\pi/(2n+1)} (D_n * I) + T_{\pi/(2n+1)} (D_n * I) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left( T_{-\pi/(2n+1)} + T_{\pi/(2n+1)} \right) S_n. \end{aligned}$$

また,

$$b_n(t) = \sum_{k=-n}^n \cos\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) e^{ikt} \quad (\forall n \in \mathbb{N}_0, t \in \mathbb{R})$$

と表されるから, (6) によって (9) の第 2 の等式も成立する.

**補題 3** 各  $k \in \mathbb{Z}$  に対して,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left( \cos\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) - 1 \right) = -\frac{1}{8} (k\pi)^2 \quad (10)$$

が成立する.

**証明**

$$\cos t = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j)!} t^{2j} \quad (\forall t \in \mathbb{R})$$

であるから,

$$n^2 \left( \cos\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) - 1 \right) = -\frac{1}{2} (k\pi)^2 \left( \frac{n}{2n+1} \right)^2 + I_n(k),$$

ここで

$$I_n(k) = n^2 \sum_{j=2}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j)!} \left( \frac{k\pi}{2n+1} \right)^{2j}.$$



$$\left(\frac{n}{2n+1}\right)^2 \rightarrow \frac{1}{4}, \quad |I_n(k)| \leq \frac{n^2}{(2n+1)^4} \sum_{j=2}^{\infty} \frac{(k\pi)^{2j}}{(2j)!} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

故に, (10) が成り立つ.

補題 4 すべての  $n \in \mathbb{N}_0$  に対して,

$$\|b_n\|_1 < \pi \left(1 + \frac{1}{4} \log 3 + \frac{2\sqrt{3}}{27}\right) < 2\pi$$

が成立する.

証明 これは [6, Chap. 10, Sec. 4, Lemma] の証明から従う.

定理 1 すべての  $f \in X, n \in \mathbb{N}_0$  に対して,

$$\|R_n(f) - f\|_X \leq A(1+B)E_n(X; f) + \frac{1}{2}\omega^*\left(X; f, \frac{\pi}{2n+1}\right) \quad (11)$$

が成立する. 但し,

$$B = \pi \left(1 + \frac{1}{4} \log 3 + \frac{2\sqrt{3}}{27}\right).$$

従って, 特に

$$\|R_n(f) - f\|_X \leq A(1+B)E_n(X; f) + \omega\left(X; f, \frac{\pi}{2n+1}\right).$$

証明  $\forall g \in M_n$  とする. このとき,  $S_n(g) = g$  であるから, 補題 2 によって,

$$\begin{aligned} R_n(g) - f &= \frac{1}{2} \left( T_{\pi/(2n+1)} + T_{-\pi/(2n+1)} \right) (g) - f \\ &= \frac{1}{2} \left( T_{\pi/(2n+1)} + T_{-\pi/(2n+1)} \right) (g - f) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left\{ T_{\pi/(2n+1)}(f) + T_{-\pi/(2n+1)}(f) - 2f \right\}. \end{aligned}$$

故に,

$$\begin{aligned} \|R_n(g) - f\|_X &\leq \frac{1}{2} (\|T_{\pi/(2n+1)}\|_{B[X]} + \|T_{-\pi/(2n+1)}\|_{B[X]}) \|g - f\|_X \\ &\quad + \frac{1}{2} \|T_{\pi/(2n+1)}(f) + T_{-\pi/(2n+1)}(f) - 2f\|_X \\ &\leq A \|g - f\|_X + \frac{1}{2} \omega^*\left(X; f, \frac{\pi}{2n+1}\right). \end{aligned}$$

従って, (5) に鑑み,

$$\|R_n(f) - f\|_X \leq \|R_n(f - g)\|_X + \|R_n(g) - f\|_X$$

$$\begin{aligned} &\leq \|R_n\|_{B[X]} \|f - g\|_X + A \|g - f\|_X + \frac{1}{2} \omega^* \left( X; f, \frac{\pi}{2n+1} \right) \\ &\leq A(\|b_n\|_1 + 1) \|f - g\|_X + \frac{1}{2} \omega^* \left( X; f, \frac{\pi}{2n+1} \right). \end{aligned}$$

故に, 補題 4 によって, (11) が成り立つ.

系 1  $\mathfrak{R} = \{R_n : n \in \mathbb{N}_0\}$  は  $X$  上の近似法である:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|R_n(f) - f\|_X = 0 \quad (\forall f \in X).$$

補題 5 すべての  $f \in X, n \in \mathbb{N}$  に対して,

$$E_n(X; f) \leq K \omega^* \left( X; f, \frac{1}{n} \right)$$

が成立する. ここで,  $K$  は  $f$  と  $n$  に依存しない正の定数である.

証明 [9, Theorem 2] において,  $r = 2$  の場合を考え, (4) を用いる.

$F[\mathfrak{R}]$  を  $\mathfrak{R} = \{R_n : n \in \mathbb{N}_0\}$  の共通不動点集合とする:

$$F[\mathfrak{R}] = \bigcap_{n=0}^{\infty} \{f \in X : R_n(f) = f\}$$

以下においては, 各  $f \in X$  に対して  $M_n$  に関する  $f$  の最良近似が存在すると仮定する.

補題 6  $0 < \alpha < 2$  とする. このとき,

$$Lip^*(X; \alpha) = \{f \in X : E_n(X; f) = O(n^{-\alpha}) \quad (n \rightarrow \infty)\}.$$

証明 これは, (4) と [10, Corollary 9 (b)] から従う.

定理 2  $f \in X$  とする. このとき, 次のことが成立する:

(a)  $0 < \alpha < 2$  とする. このとき

$$f \in Lip^*(X; \alpha) \iff \|R_n(f) - f\|_X = O(n^{-\alpha}) \quad (n \rightarrow \infty).$$

(b)

$$f \in Lip^*(X; 2) \implies \|R_n(f) - f\|_X = O(n^{-2}) \quad (n \rightarrow \infty).$$

(c)

$$f \in M_0 \iff f \in F[\mathfrak{R}] \iff \|R_n(f) - f\|_X = o(n^{-2}) \quad (n \rightarrow \infty).$$

証明 (a):  $f \in Lip^*(X, \alpha)$  とすれば, 定理 1 及び補題 5 によって

$$\begin{aligned} \|R_n(f) - f\|_X &= O \left( E_n(X; f) + \omega^* \left( X; \frac{\pi}{2n+1} \right) \right) \quad (n \rightarrow \infty) \\ &= O \left( \omega^* \left( \frac{\pi}{2n+1} \right) \right) = O(n^{-\alpha}) \quad (n \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

逆に,  $\|R_n(f) - f\|_X = O(n^{-\alpha})$  ( $n \rightarrow \infty$ ) ならば, 補題 2 によって

$$E_n(X; f) \leq \|R_n(f) - f\|_X = O(n^{-\alpha}) \quad (n \rightarrow \infty).$$

従って, 補題 6 によって  $f$  は  $Lip^*(X; \alpha)$  に属する.

(b): (a) において, 必要性はすべての  $\alpha > 0$  に対して成り立つことに注目すればよい.

(c):  $f \in M_0$  とすれば,  $f = P_0(f)$  であるから, 補題 2 と条件 (P-1) によって

$$R_n(f) = \sum_{k=-n}^n \cos\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) P_k(P_0(f)) = P_0(f) = f \quad (\forall n \in \mathbb{N}_0).$$

再び, 補題 2 と条件 (P-1) によって, すべての  $j \in \mathbb{Z}$ ,  $f \in X$  に対して,

$$P_j(R_n(f)) = \begin{cases} \cos\left(\frac{j\pi}{2n+1}\right) P_j(f) & (|j| \leq n) \\ 0 & (|j| > n) \end{cases}$$

が成立する. 今,  $\forall j \in \mathbb{Z}$ ,  $f \in F[\mathfrak{A}]$  とする. このとき,

$$P_j(f) = P_j(P_0(f)) \quad (j = 0).$$

$0 < |j| \leq n$  ならば,

$$\left(\cos\left(\frac{j\pi}{2n+1}\right) - 1\right) P_j(f) = P_j(R_n(f)) - P_j(f) = 0$$

であるから  $P_j(f) = 0$ . 従って,

$$P_j(f) = 0 = \delta_{j,0} P_0(f) = P_j(P_0(f)) \quad (0 < |j| \leq n).$$

また,

$$P_j(P_0(f)) = 0 = P_j(R_n(f)) = P_j(f) \quad (|j| > n).$$

故に, 条件 (P-3) によって  $f = P_0(f) \in M_0$ . さて,  $\|R_n(f) - f\|_X = o(n^{-2})$  ( $n \rightarrow \infty$ ) と仮定する. このとき, 補題 2, 補題 3 及び [8, Proposition 1 (i)] (cf. [2, Theorem 6.1 (b)]) によってすべての  $n \in \mathbb{N}_0$  に対して  $R_n(f) = f$  が成り立つ.

**注意 1**  $\{f_j : j \in \mathbb{Z}\}$  と  $\{f_j^* : j \in \mathbb{Z}\}$  はそれぞれ  $X$  と  $X^*$  ( $X$  の共役空間) 中の要素列で, システム  $\mathfrak{F} = \{f_j, f_j^*\}_{j \in \mathbb{Z}}$  は次の条件を満たすとする (cf. [5, 16]):

(F-1)  $f_j^*(f_k) = \delta_{j,k}$  ( $\forall j, k \in \mathbb{Z}$ ).

(F-2)  $\{g_j : j \in \mathbb{Z}\}$  で生成される線形部分空間は  $X$  で稠密である.

(F-3) すべての  $j \in \mathbb{Z}$  に対して,  $f_j^*(f) = 0$  ならば  $f = 0$  である.

このとき,

$$P_j(f) = f_j^*(f) f_j \quad (\forall j \in \mathbb{Z}, f \in X)$$

と定義すれば,  $\mathfrak{P} = \{P_j : j \in \mathbb{Z}\}$  は条件 (P-1), (P-2) 及び (P-3) を満たす. そして, (2), (3) はそれぞれ

$$f \sim \sum_{j=-\infty}^{\infty} f_j^*(f) f_j \quad (\forall f \in X),$$

$$T_t(f) \sim \sum_{j=-\infty}^{\infty} e^{-ijt} f_j^*(f) f_j \quad (\forall f \in X, t \in \mathbb{R})$$

と同じである. 従って, この設定の下で 2 節及び 3 節の結果が適用される.

### 3. 斉次バナッハ空間

本節においては,  $X$  は斉次バナッハ空間とする. 即ち,  $X$  は次の条件を満たす関数空間である (cf. [4, 7, 15, 18]):

(H-1)  $X$  は  $L_{2\pi}^1$  の線形部分空間でそれ自身ノルム  $\|\cdot\|_X$  を持つバナッハ空間である.

(H-2) ある定数  $K > 0$  が存在して,  $\|f\|_1 \leq K\|f\|_X$  ( $\forall f \in X$ ) である.

(H-3) 各  $t \in \mathbb{R}$  に対して, 右移動作用素  $T_t$  を  $T_t(f)(\cdot) = f(\cdot - t)$  ( $\forall f \in X$ ) によって定義するとき,  $T_t$  は  $B[X]$  に属する等距離的作用素である.

(H-4) 任意の  $f \in X$  に対して, 写像  $t \mapsto T_t(f)$  は  $\mathbb{R}$  上で強連続である.

斉次バナッハ空間の典型的な例は  $C_{2\pi}$  や  $L_{2\pi}^p$  ( $1 \leq p < \infty$ ) である. その他の例については, [7] (cf. [4, 15, 18]) を参照.

さて,

$$f_j(t) = e^{ijt}, \quad f_j^*(f) = \hat{f}(j) \quad (\forall j \in \mathbb{Z}, t \in \mathbb{R}, f \in X)$$

と定義する. このとき,  $\mathfrak{F} = \{f_j, f_j^*\}_{j \in \mathbb{Z}}$  は条件 (F-1), (F-2) 及び (F-3) を満たす. そこで,

$$P_j(f)(\cdot) = \hat{f}(j)e^{ij\cdot} \quad (\forall j \in \mathbb{Z}, f \in X)$$

と定める (注意 1 参照). 各  $T_t$  は展開 (3) を持ち  $A = 1$  である. また,

$$\omega_2(X; f, \delta) = \omega^*(X; f, \delta) \quad (\forall f \in X, \delta \geq 0),$$

$$M_n = \mathfrak{T}_n \quad (\forall n \in \mathbb{N}_0)$$

である.

結局, 前節までに得られたすべての結果が上述の設定の下で適用される. 特に, 系 1, 定理 1, 定理 2 はそれぞれ [1, Proposition 1.3.4] (cf. [6, Chap. 10, Sec. 4, Corollary]), [1, Theorem 2.4.8] (cf. [6, Chap. 10, Sec. 4, Theorem]), [1, Theorem 2.4.9] を一般の斉次バナッハ空間の場合へ拡張する.

## 参考文献

- [1] P. L. Butzer and R. J. Nessel, *Fourier Analysis and Approximation, Vol. I*, Academic Press, New York, 1971.
- [2] P. L. Butzer, R. J. Nessel and W. Trebels, *On summation processes of Fourier expansions in Banach spaces. I. Comparison theorems*, Tôhoku Math. J., **24** (1972), 127-140; *II. Saturation theorems*. *ibid.*, 551-569; *III. Jackson- and Zamansky-type inequalities for Abel-bounded expansions*, *ibid.*, **27** (1975), 213-223.
- [3] G. H. Hardy and W. W. Rogosinski, *Fourier Series, 3rd ed.*, Cambridge Univ. Press, 1965.
- [4] Y. Katznelson, *An Introduction to Harmonic Analysis*, John Wiley, New York, 1968.
- [5] V. D. Milman, *Geometric theory of Banach spaces I: The theory of bases and minimal systems*, Russian Math. Surveys, **25** (1970), 111-170.
- [6] I. P. Natanson. *Constructive Function Theory, Vol. I: Uniform Approximation*, Frederick Ungar, New York, 1964.
- [7] T. Nishishiraho, *Quantitative theorems on linear approximation processes of convolution operators in Banach spaces*, Tôhoku Math. J., **33** (1981), 109-126.
- [8] T. Nishishiraho, *Saturation of multiplier operators in Banach spaces*, Tôhoku Math. J., **34** (1982), 23-42.
- [9] T. Nishishiraho, *The degree of the best approximation in Banach spaces*, Tôhoku Math. J., **46** (1994), 13-26.
- [10] T. Nishishiraho, *Inverse theorems for the best approximation in Banach spaces*, Math. Japon., **43** (1996), 525-544.
- [11] 西白保敏彦, 最良近似理論と関数解析, 横浜図書, 2000.
- [12] T. Nishishiraho, *Approximation by convex sums of convolution type operators in Banach spaces*, J. Nonlinear and Convex Analysis, **2** (2001), 91-103.
- [13] W. W. Rogosinski, *Über die Abschnitte trigonometrischer Reihen*, Math. Ann. **95** (1925), 110-134.

- [14] W. W. Rogosinski, *Reihensummierung durch Abschnittskoppelungen*, Math. Z., **25** (1926), 132-149.
- [15] H. S. Shapiro, *Topics in Approximation Theory*, Lecture Notes in Math. Vol. **187**, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1971.
- [16] I. Singer, *Bases in Banach Spaces I*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1970.
- [17] W. Trebels, *Multiplier for  $(C, \alpha)$ -Bounded Fourier Expansions in Banach Spaces and Approximation Theory*, Lecture Notes in Math. Vol. **329**, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1973.
- [18] H. C. Wang, *Homogeneous Banach Algebras*, Marcel Dekker Inc., New York-Basel, 1977.
- [19] A. Zygmund, *Smooth functions*, Duke Math. J., **12** (1945), 47-76.